• Πως φτιάχνουμε/υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_U f$ μιας $f: U \to \mathbb{R}$ όπου το $U \subseteq \mathbb{R}^n$ δεν είναι απαραίτητα ένα κλειστό ορθογώνιο;

Πρώτη Προϋπόθεση

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, τότε θεωρούμε ένα $A \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο με $U \subseteq A$

Δεύτερη προϋπόθεση

Επεκτείνουμε την $f: U \to \mathbb{R}$ στην (επέκταση της στο A) $\tilde{f}: A \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\tilde{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(x), & x \in U \\ 0, & x \in A \setminus U \end{cases}$$

Άρα, αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι:

$\int_U f = \int_A \tilde{f}$.

Όμως, ακόμα και αν η f είναι σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$ στο U ($\equiv$ ~> ταυτοτικά Δηλ. $f \equiv 1 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 1(\bar{x}) = 1$)

θα έχουμε σημεία ασυνέχειας σε κάθε $x \in \partial U$. Επειδή, σε κάθε ορθογώνιο που περιέχει το x στο εσωτερικό του θα έχουμε σημεία όπου $\sup \tilde{f} = 1$ και $\inf \tilde{f} = 0$ τα αντίστοιχα ορθ γωνια θα δίνουν:

$$\sup(\tilde{f}/S)\, v(S) - \inf(\tilde{f}/S)\, v(S) = 1 \cdot v(S)$$

Αφού, για να είναι η f ολοκληρώσιμη θέλω να έχω $U(\tilde{f}, \cdot) - L(\tilde{f}, \cdot) < \varepsilon$, θέλω το σύνολο των S που περιέχουν το ∂U να έχει εμβαδόν μικρότερο του ε.

όλα αυτά οδηγούν στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός:

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει

άπειρα ορθογών.} α) Μηδενικό μέτρο (n-διάστατο) [Jordan]:

αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists$ κλειστά ορθογώνια $(U_i)_{i \in \mathbb{N}})$ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ και το $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$ ← Άθροισμα των εμβαδών τους.

πεπερ. ορθογών} β) Μηδενικό περιεχόμενο (n-διάστατο)

αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists$ κλειστά ορθογώνια $(U_i)_{i=1,\dots,k}$, $k \in \mathbb{N}$

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{k} V(U_i) < \varepsilon$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Το A του ορισμού σε εμάς αργότερα θα είναι εις περ/ρες φορές το ∂U ενός $U \subseteq \mathbb{R}^2$

Παραδείγματα:

α) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Το $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει μηδενικό περιεχόμενο αφού αν $x=(x_1,\dots,x_n)$ τότε το:

$$U = \left[x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/n}, x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/n}\right] \times \dots \times \left[x_n - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/n}, x_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/n}\right]$$ περιέχει το x και έχει περιεχόμενο:

$$V(U) = \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/n}\right)^n = \frac{\varepsilon}{2}$$

β) Το σύνολο $y=c$ του $\mathbb{R}^2$ έχει μηδενικό μέτρο αλλά όχι μηδενικό περιεχόμενο (λόγω ότι δεν είναι φραγμένο)

Γενικότερα:

Ένα σύνολο της μορφής $\{x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$ (υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$) έχει μηδενικό μέτρο αφού για ε>0 τα $U_k = [-k,k] \times \dots \times [-k,k] \times \left[c - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}\cdot(2k)^{n-1}}, c + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}\cdot(2k)^{n-1}}\right] \times$ $\times [-k,k] \times \dots \times [-k,k]$, $k \in \mathbb{N}$

έχουν την ιδιότητα $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$

και $$\sum_{i=1}^{\infty} V(U_k) = \sum_{i=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}\cdot(2k)^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

γ) Ένα κλειστό ορθογώνιο $B = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]$ $a_i < b_i$, $i=1,\dots,n$ δεν έχει μηδενικό περιεχόμενο ούτε μηδενικό μέτρο επειδή κάθε κάλυψη του B με κλειστά ορθογώνια U_k, θα έχει

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(U_k) \geq V(B) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) > 0$$

Ορισμός: Λέμε ότι μια ιδιότητα ισχύει σχεδόν παντού στο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ αν ισχύει σε κάθε σημείο του εκτός από ένα υποσύνολο μηδενικού μέτρου